

Mathématiques

Présentation des épreuves

L'épreuve orale de Mathématiques accueille les candidats pendant 30 minutes, sans préparation, et les interroge sur un ou deux exercices portant sur l'intégralité du programme de première et seconde année.

Le jury est attentif aux qualités mathématiques des candidats, à leur autonomie, leur capacité à communiquer, leur vivacité et réactivité face aux questions ou remarques du jury. Le jury ne s'attend nullement à une réussite immédiate en toute circonstance, mais à la présentation d'une réflexion organisée. Le jury apprécie particulièrement les candidats qui prennent soin d'exposer leurs idées et avec lesquels il est possible de mettre en place un dialogue fructueux afin de les aider à progresser dans l'exercice proposé.

Pour l'épreuve avec informatique, tous les exercices évaluent les compétences en Python et en algorithmique. Les candidats sont guidés dans les premières questions pour qu'ils puissent utiliser au mieux leurs trente minutes de préparation. Les exercices progressifs ont permis d'évaluer le travail fourni par les candidats lors de leurs années en classe préparatoire aux grandes écoles.

Analyse globale des résultats

Le niveau des candidats était très hétérogène tant en mathématiques qu'en Python. En effet, certains candidats étaient excellents, tandis que d'autres avaient d'importantes lacunes en mathématiques.

La plupart des candidats ont fait preuve d'un réel effort de présentation, de dynamisme et de dialogue avec les examinateurs. Les candidats – même les plus faibles – ont essayé d'utiliser le temps de préparation alloué pour écrire un code Python. Le jury constate une légère augmentation du nombre d'excellents candidats, qui ont brillé par leur maîtrise du programme et leur aisance à l'utiliser dans des situations originales. À l'inverse, le jury note aussi un nombre significatif de candidats ayant passé le filtre des épreuves écrites et qui se présentent avec un niveau étonnamment faible.

Dans l'ensemble, les candidats sont convenablement préparés et se révèlent assez efficaces dans des situations fléchées mais perdent assez vite leurs moyens dès que l'on sort des sentiers balisés. C'est trop souvent le jury qui doit créer la dynamique de l'oral en invitant les candidats à poursuivre leur calcul ou tirer le fil de leur raisonnement. Ce manque d'autonomie est à déplorer. Ainsi, les candidats qui se sont efforcés de réfléchir clairement et distinctement à haute voix en dialoguant avec le jury ont été systématiquement valorisés.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Remarques générales

Les techniques du programme de mathématiques sont globalement acquises avec tout de même de grosses lacunes sur l'énoncé exact des théorèmes du cours et/ou sur la vérification des hypothèses. C'est l'occasion de rappeler aux futurs candidats qu'une bonne connaissance du cours est la clé de tout.

Les candidats sont en général peu à l'aise avec les exercices théoriques d'algèbre linéaire notamment le théorème du rang, et les exercices sur les polynômes ou les complexes même très simples. Concernant l'analyse, le jury note une faiblesse dans les techniques de bases : notion d'équivalent en général très peu maîtrisée par les candidats, lors de cette session de très grandes lacunes sur la convergence d'une intégrale impropre.

Le niveau des candidats en algorithmique et en maîtrise du langage **Python** est très hétérogène, certains candidats sont excellents et d'autres sont bloqués par des instructions élémentaires. Il faut cependant indiquer que ces derniers sont de moins en moins nombreux au fil des ans.

Dans l'ensemble, les candidats proposent une présentation orale satisfaisante, et les techniques classiques du programme de mathématiques sont globalement acquises. Néanmoins, certains candidats articulent très peu ou **ne parlent presque pas**, comme s'ils étaient paralysés par l'enjeu. À l'inverse, d'autres candidats **parlent trop vite, sans avoir pris la peine de réfléchir au préalable**, et enchainent les erreurs de calcul ou les affirmations grossièrement fausses, ce qui ne peut que fortement les pénaliser : **l'oral n'est pas une épreuve de vitesse**.

Il faut rappeler aux candidats, qu'il s'agit ici d'une épreuve orale et qu'il est donc inutile de considérer le tableau comme une copie de concours, il est préférable de s'exprimer un maximum et de **n'écrire au tableau que les étapes importantes du calcul**. Inversement **le tableau n'est pas un simple brouillon** : il est impératif, lorsque cela est nécessaire, d'écrire soigneusement certaines assertions. Lors de séquences de calcul au tableau, **certain candidats arrêtent de parler pendant plusieurs minutes en écrivant**. Il faut impérativement éviter de faire durer ces longues minutes et s'efforcer d'expliquer ce que l'on fait tout en écrivant : ce n'est certes pas facile, mais les candidats ont tout à y gagner en dynamisant leur oral.

Par ailleurs, il **ne faut pas effacer une partie du tableau sans autorisation de l'examineur**. Parfois, des résultats intéressants, même entachés d'erreur, sont effacés à la hâte et les réécrire fait perdre un temps précieux aux candidats.

Le nombre des candidats qui passent beaucoup de temps sur les questions simples du début et qui espèrent donc ne pas être interrogés sur les questions plus délicates est toujours important et la notation en tient compte.

Trop souvent, le jury constate une rigueur très approximative quant à l'énoncé précis des théorèmes ou la vérification des hypothèses, quand ce n'est pas une confusion complète sur le nom des outils.

Enfin, le jury rappelle que tous les exercices proposés peuvent être et ne doivent être traités qu'avec les outils du programme, et que tous les points du programme sont matière à interrogation.

Au sujet de l'épreuve de mathématiques-informatique

Les étudiants reçoivent une planche en début de préparation qui contient une ou deux questions **Python**.

Ces questions peuvent dans la grande majorité des cas être traitées de manière indépendante du reste du sujet.

Les candidats doivent utiliser une partie de leur temps de préparation pour écrire un script **Python** et **l'évaluation débute systématiquement par cinq minutes devant l'ordinateur** fourni aux candidats pour **évaluer leurs connaissances sur l'informatique commune et l'algorithmique**. Cette partie représente entre **20 % et 25 % de la note finale**.

Les candidats poursuivent ensuite leur planche au tableau pour évaluer cette fois le contenu mathématiques.

Les candidats sont évalués en Algèbre/Probabilités/Géométrie en alternance avec l'Analyse et le second oral de mathématiques.

Python version 3.9, cette année les candidats avaient le choix entre les logiciels PYZO ou SPYDER 3.

L'aide **Python** standard (en ligne) est à la disposition des candidats près des ordinateurs.

Les candidats peuvent amener des boules Quies pour éviter d'être déconcentrés par la prestation du candidat précédent.

Analyse thématique

Analyse

Le jury donne ci-dessous quelques domaines où les candidats mériteraient d'accentuer les révisions.

- La convergence d'une intégrale impropre et les techniques de comparaison.
- Les équivalents : il y a eu encore des problèmes avec la manipulation des équivalents lors de cette session.
- La primitivation des fonctions usuelles.
- La vérification des hypothèses sur le signe pour les critères de comparaison.
- Théorème de comparaison série-intégrale et les inégalités qui en découlent.
- De nombreux candidats écrivent $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)$
- Théorème de dérivation termes à termes d'une série entière.
- L'analyse de première année : théorème de la limite monotone, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection, théorème de Rolle et accroissements finis, vérifier que deux applications sont réciproques l'une de l'autre.
- Les inégalités et en particulier confusion entre les inégalités strictes et larges.
- Certains candidats confondent intégrales sur un segment et intégrales généralisées.
- Les théorèmes de positivité et de croissance de l'intégrale sur un segment et l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment ou un intervalle (en cas de convergence) est nulle si la fonction est identiquement nulle sur cet intervalle.
- La notion de point critique et de maximum et minimum d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (en étudiant un signe) et le cas des bornes atteintes sur un fermé borné.
- La reconnaissance d'une progression géométrique.
- Les formules de trigonométrie.
- Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$: existence, monotonie, limites possibles...

Algèbre

- Les nombres complexes en général ne sont pas suffisamment maîtrisés.
- Le théorème de division euclidienne polynomiale est maltraité (la condition sur le degré du reste est presque systématiquement oubliée), et certains candidats se sont même révélés incapables d'effectuer une division euclidienne concrète.
- Les notions fondamentales d'algèbre linéaire (familles libres, bases, sous-espaces supplémentaires, rang, noyau et image d'un endomorphisme, matrice d'un endomorphisme dans une base donnée) donnent lieu à beaucoup de confusion.
- Le produit matriciel, en particulier de la forme UUT où U est un vecteur-colonne, a posé des difficultés insurmontables à quelques candidats.

- De trop nombreux candidats se sont révélés incapables d'écrire correctement la formule du rang.
- Pour la détermination des éléments propres d'une matrice, trop de candidats se précipitent sur le calcul du polynôme caractéristique, sans examen circonstancié de la matrice étudiée.
- Les calculs de polynôme caractéristique ont souvent été laborieux. Rappelons que la règle de Sarrus est à proscrire, et sommer toutes les colonnes n'est pas la seule opération élémentaire à considérer.
- Peu de candidats connaissent le lien entre l'inversibilité d'une matrice et le fait que 0 soit ou non valeur propre.
- L'utilisation du théorème du rang pour déterminer la dimension d'un sous-espace propre n'est pas naturelle.
- La justification simple, par l'absurde, du fait qu'une matrice carrée possédant une seule valeur propre n'est pas diagonalisable (sauf si elle est déjà diagonale) est ignorée de la plupart des candidats.
- Trop de candidats confondent encore condition suffisante et condition nécessaire de diagonalisabilité.
- La notion de polynôme annulateur de matrice, et son application à la détermination de l'inverse d'une matrice, semble bien acquise.
- Les connaissances et techniques de géométrie préhilbertienne (produit scalaire, projeté orthogonal, distance à un sous-espace de dimension finie, classification des isométries de l'espace) sont bien maîtrisées par certains candidats, et complètement ignorées par d'autres.
- Les polynômes dans leur ensemble (calculs de degré, polynômes scindés, racines, coefficients, division euclidienne...) !
- Le rang d'une matrice.
- Les propriétés d'un déterminant.
- Lien inversibilité d'une matrice et 0 n'est pas valeur propre.
- Attention les théorèmes fondamentaux de diagonalisation et trigonalisation ne sont pas toujours maîtrisés.
- Un polynôme est nul si il a une infinité de racines.

Comme chaque année, trop de candidats présentent des lacunes importantes concernant la manipulation des puissances, exponentielles et logarithmes.

De même, l'utilisation d'équivalents est souvent mal maîtrisée, et le jury voit encore beaucoup trop d'absurdités du type $\cos x \sim 1$ en $+\infty$.

Un nombre inhabituel de candidats ne connaît les développements limités usuels, même à l'ordre 1 ou 2.

Quelques candidats peinent à dériver une composée de fonctions, ou à reconnaître une forme usuelle à primitiver.

L'examen de la nature d'une série numérique (ou d'une intégrale impropre) donne souvent lieu à de grandes souffrances : rappelons que la nature d'une série s'étudie presque toujours en étudiant le terme général (et pour une série à termes positifs, un équivalent simple suffit bien souvent).

Certains candidats semblent ne pas du tout connaître la démarche pour rechercher les solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Rares sont les candidats connaissant le plan d'attaque pour la recherche des extrema d'une fonction de plusieurs variables (sur un domaine ouvert ou fermé borné), ou pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles par changement de variables (suggéré par le jury).

L'étude des courbes paramétrées est mieux maîtrisée, mais la question de la réduction du domaine d'étude a souvent posé des problèmes.

Comme chaque année, le jury rappelle que l'utilisation de la règle de D'Alembert n'est pas la seule méthode pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Les résolutions d'équations différentielles, par variation de la constante pour le 1^{er} ordre ou par abaissement de l'ordre pour le 2^e ordre, ont rarement été effectuées de façon autonome.

Les hypothèses et l'utilisation des théorèmes de Parseval et Dirichlet pour les séries de Fourier laissent encore à désirer.

De façon générale, trop de candidats présentent des lacunes concernant les résultats fondamentaux d'analyse de 1^{re} année (suites adjacentes et théorème de convergence monotone, théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection, inégalité des accroissements finis, prolongement d'une fonction de classe C^1).

Probabilités

Le jury constate depuis deux ans une amélioration des candidats sur ce thème des probabilités, les candidats ne se contentant plus de « donner » leurs résultats mais s'efforçant de les justifier, avec plus ou moins de bonheur. Néanmoins, des lacunes persistent sur les points suivants :

- confusion et / ou absence de connaissance sur les formules des probabilités conditionnelles, formules des probabilités totales et la formule de Bayes ;
- confusion entre événements indépendants et incompatibles ;
- la notion d'événement, de système complet d'événements ;
- quelques candidats ne connaissent pas les lois usuelles ni leur espérance et leur variance ;
- les propriétés des familles de variables aléatoires indépendantes ;
- certains candidats peinent à écrire la définition d'une probabilité conditionnelle ou la formule des probabilités totales, pourtant cruciale. La notion de système complet d'événements n'est pas assez naturelle ;
- des confusions persistent entre indépendance et incompatibilité ;
- le jury voit encore trop souvent des non-sens comme la probabilité d'une variable aléatoire ou l'intersection de deux probabilités ;
- les candidats n'ont en général pas le réflexe, dans des situations assez simples, de décomposer un événement en union/intersection d'événements plus élémentaires.

Géométrie

Le programme de géométrie est restreint, mais le peu qu'il y a doit être maîtrisé : équation d'un plan, vecteur normal à un plan, représentation paramétrique d'une droite, équation d'une sphère, surface définie par une équation et plan tangent en un point régulier.

Ceci étant, la géométrie irrigue de nombreux pans du programme. Les candidats, qui savent raisonner géométriquement, abordent plus facilement par exemple une situation d'algèbre linéaire. Le jury constate

depuis deux ans une amélioration des candidats sur ce thème des probabilités, les candidats ne se contentant plus de « abstraite », s'en sortent généralement beaucoup mieux que les candidats qui restent collés à l'aspect formel de la situation.

Python/Algorithmique

Là également, le jury signale ci-après des notions qui ne sont pas suffisamment maîtrisées.

- La gestion des listes et de leurs indices.
- La création d'un dictionnaire.
- Savoir coder au moins un algorithme de tri.
- Savoir modéliser un graphe par son dictionnaire d'adjacence.
- Quelques candidats ont encore du mal avec les fonctions récursives.

Conseils aux futurs candidats

- Énoncer correctement les théorèmes.
- Bien lire l'énoncé des premières questions et ne pas se précipiter.
- Vérifier systématiquement les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer.
- Utiliser les 30 minutes de préparation pour faire les calculs les plus techniques et faire la partie Python.
- Ne pas faire d'impasse sur les programmes de 1^{re} et de 2^e année car à l'oral cela peut s'avérer dramatique !
- Ne pas perdre trop temps tant dans la préparation que dans l'exposé sur les questions très faciles ou calculatoires pour pouvoir aborder les questions un peu plus intéressantes.
- Utiliser une terminologie adaptée aux calculs exposés (confusion numérateur, dénominateur, termes d'une addition et facteurs d'un produit, les sujets indéfinis, les articles définis ou indéfinis, les vecteurs de la matrice...)
- Utiliser à bon escient le tableau (ne pas tout écrire ou au contraire s'aider du tableau pour visualiser une étape de raisonnement et/ou de calcul).
- Savoir tirer profit de l'aide fournie par l'examineur.

Conclusion

Le jury précise, pour conclure, qu'il ne cherche jamais à piéger les candidats mais au contraire à les valoriser. Pour cela, il est indispensable que ceux-ci ne négligent pas la connaissance de leur cour et ne fassent aucune impasse.

L'épreuve orale est l'occasion de faire preuve de qualités attendues chez de futurs ingénieurs : rigueur scientifique, sens de la communication, honnêteté intellectuelle, autonomie, esprit critique. Ces qualités ont été perçues chez un nombre significatif de candidats, preuve, s'il en fallait encore une, de la pleine légitimité des candidats de la filière TSI.